BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О СУЩЕСТВОВАНИИ В МАЛОМ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА. II.

А.Г.АЛИЕВА
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Работа посвящена изучению вопроса существования в малом решения почти всюду одномерной смешанной задачи с граничными условиями типа Рикье для полулинейных уравнений типа Соболева четвёртого порядка. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье искомого решения. Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана теорема существования в малом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

В работе изучается вопрос существования в малом решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{txx}(t,x) - \alpha u_{xxxx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi), & (1) \\ u(0,x) = \varphi(x)\ (0 \le x \le \pi), & (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0\ \ (0 \le t \le T), & (3) \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ - фиксированное число; $0 < T < +\infty; F, \varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi])$;
$u_{xxxx}(t,x), u_{txx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\boldsymbol{sin}\, nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое решение почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,\boldsymbol{sin}\,nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\,\boldsymbol{sin}\,nx\,dx\ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)\ \ (n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-\alpha n^2 t}-\frac{2}{\pi n^2}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(\tau,x))\,\boldsymbol{sin}\,nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dx\,d\tau$$

$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,, \tag{6}$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,\boldsymbol{sin}\,nx\,dx\ \ (n=1,2,...)\,, \tag{7}$$

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\ . \tag{8}$$

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,\boldsymbol{sin}\,nx$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)\ \ (n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

3. В данной работе, с целью изучения вопроса существования решения почти всюду задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\text{☞}(u(t,x))\in C([0,T]\times[0,\pi]),\ \ \frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(t,x))\}\in C([0,T];L_2(0,\pi)) \tag{9}$$

и

$$\text{☞}(u(t,x))\big|_{x=0}=\text{☞}(u(t,x))\big|_{x=\pi}=0\qquad\forall t\in[0,T]\,, \tag{10}$$

после интегрирования по частям по x один раз в правой части (6), преобразуем к виду:

$$u_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-\alpha n^2 t}-\frac{2}{\pi n^3}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(\tau,x))\}\,\boldsymbol{cos}\,nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dx\,d\tau$$

$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,. \tag{11}$$

4. Обозначим через $B_{\beta_0,...,\beta_l,T}^{\alpha_0,...,\alpha_l}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le t \le T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty , \tag{12}$$

где $l \ge 0$ - целое число, $\alpha_i \ge 0$ $(i = \overline{0,l}), 1 \le \beta_i \le 2$ $(i = \overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно (см.[1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x) \in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,t}} \equiv \sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le \tau \le t} \left| u_n^{(i)}(\tau) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \quad (0 \le t \le T) . \tag{13}$$

5. Для функции $u(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её n-той компонентой. Пусть 💣 - любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$. Совокупность n-тых компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества 💣 $\subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного n $(n = 1,2,\dots)$ множество 💣$_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in$ 💣, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l} \left\{ \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le t \le T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \quad \forall u \in \text{💣}.$$

6. Очевидно, что если $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^k_{2,T}$ $(k \ge 1$ - целое число), то $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot \max_{0 \le \tau \le t} |u_n(\tau)| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^k \cdot \max_{0 \le \tau \le t} |u_n(\tau)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B^k_{2,t}} . \tag{14}$$

7. Пусть $u(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,T}^4$. Тогда, пользуясь оценкой (14) для $k=4$, $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$ имеем:

$$\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^i \cdot |u_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^i \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)| = \|u\|_{B_{1,t}^3} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,t}^4} \quad (i=\overline{0,3}). \tag{15}$$

Из оценок (15) и структуры пространства $B_{2,T}^4$ следует, что

$$u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x) \in C\,([0,T]\times[0,\pi]). \tag{16}$$

Кроме того, очевидно, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^{\pi} u_{xxxx}^2(t,x)dx = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 \cdot u_n(t)\right)^2 \le \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)|\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|u\|_{B_{2,t}^4}^2. \tag{17}$$

Отсюда, в силу структуры пространства $B_{2,T}^4$, следует, что

$$u_{xxxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi)). \tag{18}$$

8. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0,\pi]), \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0,\pi), \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left(s = \overline{0, \left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \tag{19}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного k) и равенством Парсевалля (для чётного k), легко доказывается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \varphi_n)^2 \le \frac{2}{\pi} \cdot \left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|_{L_2(0,\pi)}^2, \tag{20}$$

где числа φ_n $(n=1,2,...)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (20) верна и при $k=0$, если $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$.

9. В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

§2. Исследование единственности решения почти всюду задачи (1)-(3).

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_4) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.
2. $\forall R > 0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4$

$$\left| F(t,x,u_1,...,u_4) - F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_4) \right| \le C_R \cdot \sum_{i=1}^{4} \left| u_i - \widetilde{u}_i \right| , \tag{21}$$

где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

§3. Исследование существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3).

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(3)}([0,\pi]), \varphi^{(4)}(x) \in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$.
2. $F(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_4), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_4)$ $(i=\overline{0,4}) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.
3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4) = F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4) = 0 \quad \forall t \in [0,T], \xi_2,\xi_4 \in (-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u \in B_{1,T}^3$ определим в $B_{2,T}^4$ оператор (относительно V) $\mathfrak{P}_u$:

$$\mathfrak{P}_u(V(t,x)) = \widetilde{V}(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n(t) \sin nx , \tag{22}$$

где

$$\widetilde{V}_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-\alpha n^2 t} - \frac{2}{\pi n^3} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \mathfrak{Q}_u(V(\tau,x)) \cos nx \cdot e^{-\alpha n^2 (t-\tau)} dx d\tau (n=1,2,...;\ t \in [0,T]), \tag{23}$$

числа φ_n $(n = 1,2,...)$ определены соотношением (7),

$$\mathfrak{Q}_u(V(t,x)) = G(u(t,x)) + g_4(u(t,x)) \cdot V_{xxxx}(t,x) , \tag{24}$$

$$\begin{aligned} G(u(t,x)) &= g_0(u(t,x)) + g_1(u(t,x)) \cdot u_x(t,x) + \\ &+ g_2(u(t,x)) \cdot u_{xx}(t,x) + g_3(u(t,x)) \cdot u_{xxx}(t,x) , \end{aligned} \tag{25}$$

$$g_i(u(t,x)) \equiv F_{\xi_i}(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \quad (i = \overline{0,4}) , \tag{26}$$

причём $\xi_0,\xi_1,...,\xi_4$ - обозначения соответствующих аргументов функции $F(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_4)$.

Тогда очевидно, что

$$\forall u \in B_{2,T}^4 \ \mathfrak{Q}_u(u(t,x)) = \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathfrak{F}(u(t,x)) \}, \tag{27}$$

где оператор $\mathfrak{F}$ определён соотношением (8).

Из (23) получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^3$ $\forall V \in B_{2,T}^4$ и $t \in [0,T]$:

$$\|\mathcal{P}_u(V)\|^2_{B^4_{2,t}} \equiv \|\widetilde{V}\|^2_{B^4_{2,t}} \equiv \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx\right\|^2_{B^4_{2,t}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|\widetilde{V}_n(\tau)\right|\right)^2 \le$$

$$\le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\{\mathcal{Q}_u(V(\tau,x))\}^2\,dx\,d\tau\,, \tag{28}$$

где

$$a_0 \equiv 2\sum_{n=1}^{\infty}(n^4\cdot\varphi_n)^2\,, \tag{29}$$

причём конечность a_0 следует из (20) для $k=4$.

Далее, в силу структуры пространства $B^3_{1,T}$, $\forall u\in B^3_{1,T}$ и $\tau\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|\frac{\partial^i u(\tau,x)}{\partial x^i}\right\|_{C([0,\pi))} \le \|u\|_{B^i_{1,\tau}} \le \|u\|_{B^3_{1,\tau}}\quad(i=\overline{0,3})\,, \tag{30}$$

следовательно

$$\left\|\frac{\partial^i u(\tau,x)}{\partial x^i}\right\|_{C(Q_T)} \le \|u\|_{B^3_{1,T}}\quad(i=\overline{0,3})\,, \tag{31}$$

где $Q_T \equiv [0,T]\times[0,\pi]$.

Кроме того, в силу (17), $\forall V\in B^4_{2,T}$ и $t\in[0,T]$:

$$\int_0^{\pi}V^2_{xxxx}(t,x)\,dx \le \frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^4_{2,t}}\,. \tag{32}$$

Теперь, пользуясь условием 2 данной теоремы, явными выражениями $g_i(u(t,x))$ и $G(u(t,x))$, определёнными соотношениями (26) и (25), и оценками (31), легко получить, что $\forall u\in B^3_{1,T}$:

$$\|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u)\quad(i=\overline{0,4})\,, \tag{33}$$

$$\|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u)\cdot\left(1+3\|u\|_{B^3_{1,T}}\right), \tag{34}$$

где

$$C(u) \equiv \max_{i=0,4}\left\{\left\|F_{\xi_i}(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\right\|_{C(Q_T)}\right\}\,, \tag{35}$$

а $\xi_0=x,\xi_1=u_1,\dots,\xi_4=u_4$ - обозначения соответствующих аргументов функции $F(t,x,u_1,\dots,u_4)$.

Таким образом, из (28), пользуясь оценками (33),(34),(32) и соотношением (24), получаем, что для каждого фиксированного $u\in B^3_{1,T}$ $\forall V\in B^4_{2,T}$:

$$\left\| \mathcal{P}_u(V) \right\|^2_{B^4_{2,T}} \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int\limits_0^T \int\limits_0^\pi \left\{ \mathcal{P}_u(V(\tau, x)) \right\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{4T}{\alpha} \cdot C^2(u) \cdot \left(1 + 3\|u\|_{B^3_{1,T}}\right)^2 + \frac{2T}{\alpha} \cdot C^2(u) \cdot \|V\|^2_{B^4_{2,T}} . \qquad (36)$$

Из (36) следует, что для любого фиксированного $u \in B^3_{1,T}$ оператор $\mathcal{P}_u$ действует в $B^4_{2,T}$, причём ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (22)-(26), обозначением (35) и оценкой (32) для $V = V_1 - V_2$, аналогично (28), методом математической индукции получаем, что при любом фиксированном $u \in B^3_{1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^4_{2,T}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \mathcal{P}_u^k(V_1) - \mathcal{P}_u^k(V_2) \right\|^2_{B^4_{2,t}} \le \left(\frac{1}{\alpha} \cdot C^2(u) \right)^k \cdot \|V_1 - V_2\|^2_{B^4_{2,T}} \cdot \frac{t^k}{k!}, \qquad (37)$$

где k - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B^3_{1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^4_{2,T}$:

$$\left\| \mathcal{P}_u^k(V_1) - \mathcal{P}_u^k(V_2) \right\|_{B^4_{2,T}} \le q_k(u) \cdot \|V_1 - V_2\|_{B^4_{2,T}}, \qquad (38)$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot C^2(u) \cdot T \right)^{\frac{k}{2}}. \qquad (39)$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u$: $q_k(u) < 1$. Для таких k оператор $\mathcal{P}_u^k$ оказывается сжатым в пространстве $B^4_{2,T}$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B^4_{2,T}$ неподвижная точка V оператора $\mathcal{P}_u^k$ является и единственной в $B^4_{2,T}$ неподвижной точкой оператора $\mathcal{P}_u$:

$$V = \mathcal{P}_u(V), \quad V \in B^4_{2,T}. \qquad (40)$$

Сопоставив каждому $u \in B^3_{1,T}$ единственную в $B^4_{2,T}$ неподвижную точку V оператора $\mathcal{P}_u$ порождаем оператор H:

$$H(u) = V = \mathcal{P}_u(V), \qquad (41)$$

действующий из $B^3_{1,T}$ в $B^4_{2,T}$.

Далее, показывается, что оператор H действует из $B^3_{1,T}$ в $B^4_{2,T}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B^3_{1,T}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B_{1,T}^{3}$. Пусть $\text{😐} = \text{😐}_R$ - любой замкнутый шар пространства $B_{1,T}^{3}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, очевидно, что при любом $u \in \text{😐}_R$, в силу (31), $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x) \le R\,. \tag{42}$$

Тогда очевидно, что

$$\forall u \in \text{😐}_R \;\; \|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R \;\; (i=\overline{0,4}),\;\; \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R\,, \tag{43}$$

где $C_R > 0$ - постоянная, а g_i $(i=\overline{0,4})$ и G определены соотношениями (26) и (25).

Пользуясь оценками (43), (32) и соотношениями (22)-(26), аналогично (28) получаем, что при любом $u \in \text{😐}_R$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|^2_{B^4_{2,t}} \equiv \|V\|^2_{B^4_{2,t}} \equiv \|\mathfrak{I}_\iota(V)\|^2_{B^4_{2,t}} \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \left\{\mathfrak{I}_\iota(V(\tau,x))\right\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{4T}{\alpha}\cdot C_R^2 + \frac{2}{\alpha}\cdot C_R^2 \cdot \int_0^t \|V\|^2_{B^4_{2,\tau}} d\tau\,. \tag{44}$$

Из (44), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in \text{😐}_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^4_{2,T}} \equiv \|V\|^2_{B^4_{2,T}} \le \left(a_0 + \frac{4T}{\alpha}\cdot C_R^2\right)\cdot \exp\left\{\frac{2}{\alpha}\cdot C_R^2 \cdot T\right\} \equiv a_R^2\,, \tag{45}$$

следовательно, множество $H(\text{😐}_R)$ ограничено в $B^4_{2,T}$.

Далее, так как $\forall u \in B^3_{1,T}$

$$H(u) = V \equiv \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin nx\,,$$

где $V_n(t)$ $(n=1,2,...)$ равна правой части (23), то очевидно, что

$$V_n'(t) = -\alpha n^2 \cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot \varphi_n + \frac{2\alpha}{\pi n}\cdot \int_0^t\int_0^\pi \mathfrak{I}_\iota(V(\tau,x)\cos nx \cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)} dx d\tau -$$

$$-\frac{2}{\pi n^3}\cdot\int_0^\pi \mathfrak{I}_\iota(V(t,x))\cos nx dx \quad (n=1,2,...;\; t\in[0,T]). \tag{46}$$

Тогда, пользуясь соотношениями (24)-(26) и оценками (43),(32),(45), $\forall u \in \text{😐}_R$ имеем:

$$\|(H(u))_t\|^2_{B^2_{2,T}} \equiv \|V_t\|^2_{B^2_{2,T}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 \cdot \max_{0\le t\le T}|V_n'(t)|\right)^2 \le$$

$$\le 3\alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\cdot\varphi_n\right)^2 + 2\pi^2\left(2+a_R^2\right)\cdot C_R^2 + 3\alpha\left(2+a_R^2\right)\cdot C_R^2 \equiv b_R^2\,. \tag{47}$$

Таким образом, из оценок (45) и (47) следует, что $\forall u \in \text{😐}_R$:

$$\|H(u)\|_{B^{4,2}_{2,2,T}} \equiv \|H(u)\|_{B^{4}_{2,T}} + \|(H(u))_t\|_{B^{2}_{2,T}} \le a_R + b_R \equiv c_R . \quad (48)$$

Следовательно, множество $H(\text{😐}_R)$ ограничено в $B^{4,2}_{2,2,T}$. Отсюда, по теореме 1, следует, что множество $H(\text{😐}_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^3_{1,T}$, компактно в $B^3_{1,T}$. Таким образом, оператор H действует в $B^3_{1,T}$ компактно. Так как оператор H действует в $B^3_{1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^3_{1,T}$ вполне непрерывно.

Далее, в силу (14) для $k=4$ и (45), $\forall u \in \text{😐}_R$ имеем:

$$\|H(u)\|_{B^3_{1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|H(u)\|_{B^4_{2,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \left(a_0 + \frac{4T}{\alpha} \cdot C_R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{\alpha} \cdot C_R^2 \cdot T \right\} . \quad (49)$$

Из (49) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{a_0} \quad (50)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u \in \text{😐}_R \quad \|H(u)\|_{B^3_{1,T}} \le R ,$$

т.е. $H(\text{😐}_R) \subset \text{😐}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (50), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар 😐_R в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в 😐_R по крайней мере одну неподвижную точку $u : H(u) = u$. Так как $u = H(u) = V = \mathscr{A}_\iota(V)$, то $u = V$ и, следовательно, $u = H(u) = \mathscr{A}_\iota(u)$, причём, в силу (48), $u(t,x) \in B^{4,2}_{2,2,T}$.

Далее, в силу $u = V$ и (27), для найденной неподвижной точки $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ удовлетворяют системе (11). Так как для функции $u(t,x) \in B^{4,2}_{2,2,T}$, обладающей свойствами (16),(18) и (3), в силу условий 2 и 3 данной теоремы, выполнены все условия (9) и (10), то функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$, удовлетворяющие системе (11), удовлетворяют и системе (6). Пользуясь этим, показывается, что найденная функция

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{4,2}_{2,2,T} \quad (51)$$

является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 3 следует выполнение всех условий теоремы 2, то при условиях теоремы 3 решение почти всюду задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2. Отметим, что условие 1 теоремы 3, наложенное на начальную функцию $\varphi(x)$, не только достаточно, но и необходимо для существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 3. Как видно из формулировки теоремы 3, для существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3) от функции $F(t,x,u_1,...,u_4)$ и её производных $F_x(t,x,u_1,...,u_4)$, $F_{u_i}(t,x,u_1,...,u_4)$ $(i=\overline{1,4})$ при $|u_1|+...+|u_4|\to+\infty$ ничего не требуется, т.е. на порядок роста при $|u_1|+...+|u_4|\to+\infty$ этих функций никакого ограничения нет.

Замечание 4. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [2] и [3], в которых изучены вопросы существования (как в малом, так и в целом) и единственности (в целом) обобщённого решения задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дис…докт.физ.-мат.наук, Баку: 1973 г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.
2. Худавердиев К.И., Алиева А.Г. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева четвёртого порядка. – Материалы Республиканской научной конференции, посвящённой 85-летнему юбилею Г.А.Алиева. Изд. Бакинского Университета, 2008 г., с.113-115.
3. Алиева А.Г. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева четвёртого порядка. I. – Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2008 г., №2, с.62-72.

BİR SİNİF DÖRDÜNCÜ TƏRTİB SOBOLEV TİPLİ YARIM-XƏTTİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN LOKAL VARLIĞI HAQQINDA. II.

A.Q.ƏLİYEVA

XÜLASƏ

İş bir sinif dördüncü tərtib Sobolev tipli yarım-xətti tənliklər üçün Rikye tipli sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin lokal varlığı məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan həllin naməlum Furye əmsallarına nəzərən müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Nəticədə ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin lokal varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

EXISTENCE IN SMALL OF A ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF SEMI-LINEAR FOURTH ORDER EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE. II.

A.G.ALIYEVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence in small of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for one class of semi-linear fourth order equations of Sobolev type. Conception of almost everywhere solution for mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients of the sought solution. Besides, existence theorem in small of almost everywhere solution of the problem (1)-(3) is proved by combining the generalized principle of contraction mappings and the principle of Schauder.